非線形ナップザック問題における上界値の改良 (不確実性の下での数理モデルの構築と最適化)

木村, 作郎; 森部, 浩至; 仲川, 勇二

数理解析研究所講究録
1194巻 2001年 111-115

非線形ナップザック問題における上界値の改良

木村 作郎[1]， 森部 浩至[2]， 仲川 勇二[3]
KIMURA Sakuo, MORIBE Hiroshi, NAKAGAWA Yuji

[1] 関西大学　高槻キャンパス事務室
Takatsuki Campus Office, Kansai University
[2] 関西大学大学院　総合情報学研究科
Graduate School of Informatics, Kansai University
[3] 関西大学　総合情報学部
Faculty of Informatics, Kansai University

1. はじめに

決定すべき空間が離散的であるような最適化問題は離散最適化問題と呼ばれる．
離散最適化問題を解く際に重要な役割を担うのは，その問題の上界あるいは下界の限界値(Bound)の計算である． 限界値を求めるための最も一般的な方法は，変数が整数であるという条件を除いて，できあがった線形計画問題，すなわち線形緩和問題を解くことである．Sinha-Zoltners[4]は線形緩和問題の最適解であるＬＰ解をもとに，より強い限界値計算法を用いている．
本論においては，離散最適化問題のうちの非線形ナップザック問題を解くために，モジュラ法(Modula Approach ,MA)[1]に基づく，より効率の良いアルゴリズムを構築するために，Sinha-Zoltnersよりもさらに強い上界値(Upper bound)を計算する方法を提案する．

2. 非線形ナップザック問題

単一制約をもち，分離可能な非線形離散最適化問題は，非線形ナップザック問題(Nonlinear Knapsack Problem)とよばれる．

$$[P^0]:\quad \mathit{Maxmize}\quad f^0(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{n} f_i^0(x_i) \tag{1}$$

$$\mathit{subject\ to}\quad g^0(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{n} g_i^0(x_i)\le b^0$$

$$x\in K_i^0 \qquad \mathit{for}\quad i\in N$$

ここで，

$$\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad K_i^0=\{1,2,\ldots,k_i^0\},\quad N=\{1,2,\ldots,n\}$$

である．一般性を失うことなしに，

$$f_i^0(x_i)\ge 0\quad \mathit{for}\quad x_i=1,\ldots,k_i^0,\quad i=1,\ldots,n$$

$$g_i^0(x_i)\ge 0\quad \mathit{for}\quad x_i=1,\ldots,k_i^0,\quad i=1,\ldots,n$$

を仮定する．
仲川 [1] は，離散最適化問題を解くための新解法としてモジュラ法(Modular Approach)を提案した．モジュラ法は，次のステップ(1)と(2)を繰り返して実行する．
(1) 変数の決定空間を縮小するように深測操作を適用する．
(2) 問題の変数の数を減らすために，２変数を新しい１変数に統合する．

3.深測操作

モジュラ法(MA)は，$s\in N, k\in K_s^0$ に対する部分問題$[P^0 : x_s = k]$に対して,3 つの深測操作(Fathoming test)を行い，決定空間を縮小する.

(1) 実行可能性操作(Feasible Test)
(2) 限界値操作(Bound Test)
(3) 優越性操作(Dominance Test) (整数優越)

整数優越 (Integer Dominance) (優越性操作)

問題$[P^0]$において，$f_s^0(k')\geq f_s^0(k)$ ， $g_s^0(k')\leq g_s^0(k)$ となる $k'\in K_s^0$ が存在するならば,部分解 $x_s = k$ は優越され，深測される.

原問題$[P^0]$に整数優越を適用すると次式が得られる.

$$[P^A]:\quad Maximize \quad f^A(x)=\sum_{i=1}^{n^A} f_i^A(x_i) \tag{2}$$

$$subject\ to \quad g^A(x)=\sum_{i=1}^{n^A} g_i^A(x_i)\leq b^A,$$

$$x\in K_i^A \qquad for \quad i\in N^A$$

ここで，$N^A=\{1,2,\ldots,n^A\}$，$K_i^A=\{1,2,\ldots,k_i^A\}$ である．また，任意の $i\in N^A$ に対して,$g_i^A(1)=0, g_i^A(1)\leq g_i^A(2)\leq\ldots\leq g_i^A(k_i^A)$ である.

さらに，次の DGR 優越(Decreasing Gain Ratio Dominance)を考える．DGR 優越は，多重選択ナップザック問題(Multiple-choice Knapsack Problem)に対する LP 優越と同じである.

DGR優越

$$\frac{f_i^A(k)-f_i^A(k')}{g_i^A(k)-g_i^A(k')}\leq\frac{f_i^A(k'')-f_i^A(k)}{g_i^A(k'')-g_i^A(k)} \tag{3}$$

となる $k', k''\in K_i^A$ が存在するならば，解 $x_i = k$ は優越される.

4.上界値の計算

問題$[P^A]$の上界値を計算するために，問題$[P^A]$ において DGR 優越 (LP 優越) を適用して,次の DGR 型の非線形ナップザック問題を考える.

$$[P^B(b^B)]:\quad Maximize \quad f^B(x)=\sum_{i=1}^{n^A} f_i^B(x_i) \tag{4}$$

$$subject\ to \quad g^B(x)=\sum_{i=1}^{n^A} g_i^B(x_i)\leq b^B,$$

$$x\in K_i^B=\{1,2,\ldots,k_i^B\} \qquad for\ i=1,\ldots,n^A,$$

ここで,

$$f_i^B(k) < f_i^B(k+1) \quad for \quad k \in \{1,2,\ldots,k_i^B - 1\}, i = 1,\ldots,n^A,$$
$$g_i^B(k) < g_i^B(k+1) \quad for \quad k \in \{1,2,\ldots,k_i^B - 1\}, i = 1,\ldots,n^A,$$
$$w_i(k) > w_i(k+1) \quad for \quad k \in \{2,3,\ldots,k_i^B - 1\}, i = 1,\ldots,n^A,$$
$$w_i(k) = \frac{f_i^B(k) - f_i^B(k-1)}{g_i^B(k) - g_i^B(k-1)}$$

である．

次に，よく知られた greedy アルゴリズム（Fox[3]）を用いて，問題$[P^B(b^B)]$の greedy 解x^Gが得られる．

$$\min_{i=1,2,\ldots,n^A}\{w_i(x_i^G)\} > w_{i^*}(x_{i^*}^G + 1), \tag{5}$$

$$0 \le b^B - \sum_{i=1}^{n} g_i^B(x_i^G) < g_{i^*}^B(x_{i^*}^G + 1)$$

ここでi^*は，

$$w_{i^*}(x_{i^*}^G + 1) = \max_{i=1,2,\ldots,n^A}\{w_i(x_i^G + 1)\}$$

で定義される．得られた greedy 解は，暫定解(incumbent　solution)を更新する．問題$[P^B(b^B)]$ の上界値は，greedy 解x^Gを用いて次式で与えられる．

$$f^R = \sum_{i=1}^{n^A} f_i^B(x_i^G) + w_{i^*}(x_{i^*}^G + 1)\{b^B - \sum_{i=1}^{n^A} g_i^B(x_i^G)\} \tag{6}$$

次に，Sinha-Zoltners[4]が用いた，より厳密な上界値の計算式について述べる．　pは，

$$g_{i^*}^A(p) \le h < g_{i^*}^A(p+1) \tag{7}$$

を満たすものとする．ここで，

$$h = g_{i^*}^B(x_{i^*}^G) + b^B - \sum_{i=1}^{n^A} g_i^B(x_i^G) \tag{8}$$

である．次に，

$$w_{i^{Prv}}(x_{i^{Prv}}^G) = \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n^A \\ i \ne i^*}}\{w_i(x_i^G)\} \tag{9}$$

および

$$w_{i^{Nxt}}(x_{i^{Nxt}}^G + 1) = \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n^A \\ i \ne i^*}}\{w_i(x_i^G + 1)\} \tag{10}$$

となるi^{Prv}とi^{Nxt}を決定する．Sinha-Zoltners が用いた上界値の計算式は，

$$f^{UB} = \max\{U^1, U^2\} \tag{11}$$

である．ここで，

$$U^1 = f^R - \{w_{i^*}(x_{i^*}^G + 1) - w_{i^{Nxt}}(x_{i^{Nxt}}^G + 1)\}\{h - g_{i^*}^A(p)\}, \tag{12}$$

$$U^2 = f^R - \{w_{i^{Prv}}(x_{i^{Prv}}^G) - w_{i^*}(x_{i^*}^G + 1)\}\{g_{i^*}^A(p+1) - h\} \tag{13}$$

である．

以下において，より強い上界値の計算方法（変数固定式上界値計算法）を提案する．

変数固定式上界値計算法

問題$[P^B(b^B)]$ において,

(1) $K_i^B (i \in N)$ を2グループに分ける.

$$K_i^U = \{k \in K_i^B \mid w_i(k) > w_{i^\cdot}(x_{i^\cdot}^G)\}$$

$$K_i^L = \{k \in K_i^B \mid w_i(k) \le w_{i^\cdot}(x_{i^\cdot}^G)\}$$

(2) $K_i^U (i \in N)$ に対して,数列

$$N^U = \{s(1), s(2), \ldots, s(n^U)\} \subseteq N \qquad \text{を}$$

$$\min_{k \in K_{s(l)}^U} \{w_{s(l)}(k)\} \le \min_{k \in K_{s(l+1)}^U} \{w_{s(l+1)}(k)\}$$

となるように決定する.同様に, K_i^L に対して,数列

$$N^L = \{t(1), t(2), \ldots, t(n^L)\} \subseteq N \qquad \text{を}$$

$$\max_{k \in K_{t(l)}^L} \{w_{t(l)}(k)\} \ge \max_{k \in K_{t(l+1)}^L} \{w_{t(l+1)}(k)\}$$

となるように決める.

(3) N^U, N^L に同じ要素がある場合,たとえば, $s(l^U) = t(l^L)$ の場合,

①$l^U < l^L$ であれば, $t(l^L)$ を N^L から除く.

②$l^U = l^L$ であれば, N^U と N^L の要素数の多い方から除く.

(4)問題$[P^A]$に対して固定する変数の数だけ,前から順番にN^U, N^Lを取る.固定された変数に関して,その変数の代替案を順番に選択する.それぞれの代替案の組み合わせについてf^Rを計算し,その中の最大値を問題$[P^B(b^B)]$の上界値とする.

上界値計算の効率化

(4)の計算において次の定理を利用すると,上界値の計算が効率的になる.

[定理1]　問題$[P^B(b_1')]$, $[P^B(b_2')]$の greedy 解をそれぞれ $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$とする.もし, $b_1' \le b_2'$ ならば, $\mathbf{x}^1 \le \mathbf{x}^2$である.

(証明) $\mathbf{x}^1$ は問題$[P^B(b_1')]$の greedy 解であるから,

$$\min_{i=1,2,\ldots,n^A} \{w_i(x_i^1)\} \quad > \quad \max_{i=1,2,\ldots,n^A} \{w_i(x_i) \mid x_i \in \{x_i^1+1, x_i^1+2, \ldots\ldots, k_i^B\}\}$$

$$g_i(x_i^1) < g_i(x_i^1+1) < \cdots\cdots < g_i(k_i^B) \qquad for \quad i = 1, \ldots, n$$

したがって, $\mathbf{x}^1 \le \mathbf{x}^2$ となる.(証明終り)

[定理1]は, greedy アルゴリズムは,問題$[P^B(b_2')]$の初期解として $\mathbf{x}^1$を用いることを示している.したがって,問題$[P^A : x_s = k]$と$[P^A : x_s = k+1]$は制約式の右辺,すなわち $b^A - g_s^A(k)$ と $b^A - g_s^A(k+1)$ が異なるだけであるから, $s \in \{1, \ldots, n^A\}$ に対する問題$[P^A : x_s = 1], [P^A : x_s = 2], \ldots, [P^A : x_s = k_s^A]$の上界値は,定理1を利用すると効率的に計算できる.この上界値の計算手法は, Marsten and Morin [5] の resource-space tour の特別な場合である.

5.むすび

本稿では,非線形ナップザック問題の最適解を求める際,重要な役割を担う『よい』上界値を求めるための計算法(変数固定式上界値計算法)を提案した.同様な計算式は

Sinha-Zoltners が用いているが，変数固定式上界値計算法の方がより強い上界値を与えることを示した．

簡単な例題および実用規模の非線形ナップザック問題を解くことにより，変数固定式上界値計算法を用いて得られる上界値は，Sinha-Zoltners が用いた計算式による上界値よりも，より強い上界値であることが明らかになった．

今後は，本稿で提案した変数固定式上界値計算法を用いて，変数及び代替案の多いため従来は解くことができなかった非線形ナップザック問題を解く方法を開発していく予定である．

参考文献

[1]仲川勇二:“離散最適化問題のための新解法“,電子情報通信学会論文誌,Vol.J73-A No.3, pp.550-556(1990.3).

[2]Y.Nakagawa and A.Iwasaki: “Modular Approach for Solving Nonlinear Knapsack Problems”, IEICE TRANS.FUNDAMENTALS,Vol.E82-A,NO.9,SEP(1999).

[3]B,Fox: “Discrete optimization via marginal analysis”, Manag.Sci,Vol.13(1966).

[4]P.Sinha and A.Zoltners: “The Multiple-Choice Knapsack Problem”, Oper.Res,Vol.27, pp.125-131(1979).

[5]R.E.Marsten and T.L.Morin: “ A hybrid approach to discrete mathematical, programming”, Math. Programming,Vol.14,pp.21-40(1978).